

# Nejistoty v měření III: nejistoty nepřímých měření

V článcích [1] a [2] byl podán přehled současných názorů na problematiku nejistot v měření obecně a představen způsob výpočtu nejistot při méně náročných přímých měřeních. Tento třetí příspěvek z volného cyklu článků je věnován nepřímým měřením a naznačuje principy řešení složitějších případů měření, ve kterých se vyskytují korelační vlivy mezi jednotlivými měřeními, popř. měřenými veličinami. Je ukázáno, jak vzájemné korelační vazby vstupních veličin postup vyhodnocování nejistot podstatně komplikují. Jako dodatek jsou uvedeny čtyři příklady modelových situací – těch, které obsahují korelační vlivy, i těch, kde lze tyto vlivy zanedbat.

## 1. Úvod

V předchozích článcích [1] a [2] bylo uvedeno, co to jsou nejistoty měření a jak se určují při přímých měřeních. Současně bylo naznačeno, jak se nejistoty přenášejí na veličiny, které nejsou měřeny přímo, ale jsou v jednoduchém funkčním vztahu s přímo měřenými veličinami, mezi nimiž však neexistují vzájemné korelace. Následující text je věnován složitějším případům charakteristickým přenosem nejen nejistot, ale i kovariancí, do výsledku měření nepřímo měřené veličiny. Jako vstupní veličiny jsou dále v textu označovány přímo měřené veličiny i veličiny, jejichž nějaké hodnoty (odhady), stejně jako jejich nejistoty a kovariance, jsou známy (může přitom jít nejen o měřené veličiny, ale také o veličiny ovlivňující výsledek, tj. korekce, fyzikální konstanty atd.). Veličiny, jejichž hodnotu chceme měřením zjistit, jsou analogicky označovány jako *veličiny výstupní*.

## 2. Postupy určování standardních nejistot při nepřímých měřeních

Stejně jako ve [2] je veličina  $Y$ , která je předmětem zájmu (výstupní veličina), známou funkcí  $f$  veličin  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Veličiny  $X_1, X_2, \dots, X_m$  (vstupní veličiny) jsou takové, které lze přímo změřit nebo jejichž odhady, nejistoty a kovariance známe z jiných zdrojů. Tedy

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (1)$$

Odhad  $y$  výstupní veličiny  $Y$  se určí ze vztahu

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2)$$

kde  $x_1, x_2, \dots, x_m$  jsou odhady vstupních veličin  $X_1, X_2, \dots, X_m$ .

Nejistota odhadu  $y$  veličiny  $Y$  pro případ, že odhady  $x_1, x_2, \dots, x_m$  jsou *nekorelované* (viz dále), se určí, zcela shodně jako v případech uvedených v [1] a [2], podle vztahu

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^m A_i^2 u^2(x_i) \quad (3)$$

přičemž pro koeficienty citlivosti (převodové koeficienty)  $A_i$  platí

$$A_i = \left. \frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_m)}{\partial X_i} \right|_{X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m} \quad (4)$$

V případě, že odhady  $x_1, x_2, \dots, x_m$  jsou *korelované* (viz dále v kap. 3), je třeba uvažovat také kovariance mezi jednotlivými odhady, které tvoří další složky výsledné nejistoty. Pro korelované vstupní veličiny se potom nejistota výstupní veličiny určí ze vztahu

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^m A_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=2}^m \sum_{j<i} A_i A_j u(x_i, x_j) \quad (5)$$

kde  $u(x_i, x_j)$  je kovariance mezi navzájem klovány odhady  $x_i$  a  $x_j$ , což mohou být jak dvě vzájemně závislé různé veličiny, tak i dvě hodnoty téže veličiny, mezi nimiž existuje jistá korelační vazba, jak bude stručně přibliženo v kap. 3.

Někdy je výhodné určit nejistoty odhadu  $y$  výstupní veličiny  $Y$  zvlášť metodou A a zvlášť metodou B. Potom se celková (kombinovaná) standardní nejistota určí podle vztahu

$$u_C(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_B^2(y)} \quad (6)$$

Řešení jednodušší situace nepřímého měření bez kovariancí ukazuje příklad 1 v dodatku na konci tohoto článku.

## 3. Kovariance při určování výsledných nejistot

### 3.1 Kovariance a nejistoty

Ve [2] byly uvedeny možné nejistoty způsobené vlivem různých zdrojů. Zde nyní budou podle slibu ozeřeny vzájemné vazby mezi jednotlivými zdroji, které mají za následek existenci kovariancí při působení jednotlivých zdrojů nejistot.

Kovariance mezi odhady vlivů jednotlivých zdrojů určují, jak jsou tyto odhady vzájemně ovlivněny společnými zdroji nejistot. Navzájem závislé zdroje nejistot přispívají k výsledné nejistotě více nebo méně podle toho, jak se příslušné nejistoty slučují. V úvahu se tyto společné zdroje berou proto, aby bylo možné jejich vliv zohlednit ve výsledné nejistotě. Kovariance mohou výslednou nejistotu zvětšit i zmenšit. Závisí to především na jejich charakteru (zda zdroje působí souhlasně či protichůdně na dva uvažované odhady) a také na tvaru funkce, kterou jsou vázány na výstupní veličinu.

Kovariance mezi jednotlivými vstupními veličinami  $X_i$  a  $X_j$  se určí podobně jako nejistoty buď metodou typu A, založenou na statistickém zpracování naměřených údajů, nebo od ní odlišnou metodou typu B (viz [1], [2]).

### 3.2 Stanovení kovariance mezi odhady $x_i$ a $x_j$ : metoda typu A

Metoda typu A se ke stanovení kovariancí mezi dvěma odhady  $x_i$  a  $x_j$  dvou vstupních veličin (zdrojů nejistot)  $X_i$  a  $X_j$  používá tehdy, je-li k dispozici  $n$  naměřených hodnot obou veličin  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$  a  $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}$ . Jsou-li odhady  $x_i$  a  $x_j$  představovány aritmetickými průměry

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik}, \quad \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{jk} \quad (7)$$

vypočítá se kovariance určená metodou typu A podle vztahu

$$u_A(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j) \quad (8)$$

### 3.3 Stanovení kovariance mezi odhady $x_i$ a $x_j$ : metoda typu B

Kovariance  $u_B(x_i, x_j)$  je kovariance vyhodnocená metodou B, odlišnou od metod vycházejících ze statistické analýzy naměřených údajů. Kovarianci lze určit:

- čtením z certifikátů přístrojů, literatury atd.,
- výpočtem.

Výpočet se skládá z těchto pěti rámcových kroků:

1. Vytipují se zdroje závislosti (zdroje korelací).

2. Pro každý zdroj každé dvojice odhadů se na základě zkušenosti odhadne korelační koeficient  $r(x_i, x_j)$ , vyjadřující míru závislosti mezi odhady. Ten může obecně nabývat hodnoty od  $-1$  do  $+1$ . Hodnoty blízké nule odpovídají slabé závislosti, hodnoty blízké  $\pm 1$  odpovídají závislosti silné. Příslušná hodnota kovariance se určí ze vztahu (viz např. (1), [11])

$$u_B(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) u_B(x_i) u_B(x_j) \quad (9)$$

3. V případě, že dvě vstupní veličiny  $X_1, X_2$  s odhady  $x_1, x_2$  jsou funkcemi *nezávislých* veličin  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ , které lze vyjádřit vztahy

$$X_1 = g_1(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \quad (10)$$

$$X_2 = g_2(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$$

určí se kovariance mezi odhady  $x_1, x_2$  ze vztahu

$$u_B(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m A_{1i} A_{2i} u_B^2(z_i) \quad (11)$$

kde  $A_{1i}, A_{2i}$  jsou koeficienty citlivosti pro funkce  $g_1, g_2$  podle vztahu (4). Vztah (11) umožňuje určit kovarianci mezi odhady na základě znalosti funkčních závislostí vstupních veličin  $X_1$  a  $X_2$  na nezávislých veličinách  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ . To znamená, že vhodným sestavením modelu měření je někdy možné obejít jinak nevyhnutelné odhadování hodnoty korelačního koeficientu. Jestliže se veličiny  $X_1$  a  $X_2$ , které vystupují v modelu (1), nahradí vztahy (10), vzájemně závislé veličiny  $X_1$  a  $X_2$  už dále nebudou v modelu (1) vystupovat.

4. V případě, že dvě vstupní veličiny  $X_1, X_2$  s odhady  $x_1, x_2$  jsou funkcemi *závislých* veličin  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ , což lze vyjádřit vztahy (10), určí se kovariance mezi odhady  $x_1, x_2$  ze vztahu

$$u_B(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{1i} A_{2j} u_B(z_i, z_j) = \sum_{i=1}^m A_{1i} A_{2i} u_B^2(z_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1, j \neq i}^m A_{1i} A_{2j} u_B(z_i, z_j) \quad (12)$$

kde  $u_B(z_i, z_j)$  je známá kovariance mezi odhady  $z_i$  a  $z_j$ .

5. Jestliže nelze určit korelační koeficient ani se vyhnout korelacím sestavením vhodného modelu, doporučuje se určit maximální vliv korelace na výslednou nejistotu prostřednictvím horní hranice odhadu standardní nejistoty měřené veličiny. Předpokládejme, že v modelu (1) jsou veličiny  $X_1$  a  $X_2$  korelované a že stupeň korelace neznáme. Ostatní veličiny v modelu nejsou korelované, takže potom platí

$$u_B^2(y) \leq [ |A_1 u_B(x_1)| + |A_2 u_B(x_2)| ]^2 + \sum_{i=3}^m A_i^2 u_B^2(x_i) = A_1^2 u_B^2(x_1) + A_2^2 u_B^2(x_2) + 2 |A_1 A_2| u_B(x_1) u_B(x_2) + \sum_{i=3}^m A_i^2 u_B^2(x_i) = \sum_{i=1}^m A_i^2 u_B^2(x_i) + 2 |A_1 A_2| u_B(x_1) u_B(x_2) \quad (13)$$

To znamená, že není-li k dispozici dostatek informací pro přesné ohodnocení kovariancí, a tím i výsledné nejistoty, je možné uvádět horní hranici nejistoty.

#### 4. Příklady zdrojů korelací v návaznosti na zdroje nejistot

##### 4.1 Nebezpečí povrchního úsudku

Problematika určování kovariancí mezi korelovanými zdroji nejistot je ve své úplnosti velmi složitá a není v možnostech tohoto stručného článku ji uceleně a detailně probrat. Často se při podrobné analýze lze s korelacemi a kovariancemi setkat i tam, kde bychom to při běžném pohledu vůbec nečekali. Zájemcům o bližší seznámení se s problematikou lze opětovně doporučit literaturu uvedenou u první části cyklu [1] v časopise Automa č. 7-8/2001 (zejména tam uvedené zdroje [1], [2], [11], popř. další).

V dalším textu je poukázáno na několik typických případů zdrojů korelací v návaznosti na uvedené zdroje nejistot. Vždy se přitom a priori předpokládá měření za shodných a stálých podmínek.

##### 4.2 Opakované měření jedním měřidlem

Při opakovaném přímém měření tím samým měřidlem za stejných podmínek bude odhadem hodnoty měřené veličiny aritmetický průměr naměřených hodnot a nejistotou stanovenou metodou typu A bude výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru. Vlivy chyby použitého měřidla a podmínek měření se zahrnou do nejistoty určené metodou typu B. Kovariance mezi měřeními je založena společnou chybou použitého měřidla při jednotlivých měřeních a rovná se čtverci nejistoty měřidla (korelační koeficient je roven 1). Kovarianci určenou metodou typu A lze v tomto případě zpravidla zanedbat.

##### 4.3 Opakované měření různými měřidly

V případě, že je pro každé měření použito jiné měřidlo, např. pocházející od jiného výrobce, vyrobené jinou technologií apod., lze oprávněně předpokládat, že mezi chybami měřidel nejsou žádné souvislosti. Kovarian-

ce mezi měřeními zapříčiněné chybou použitých měřidel se nebudou vyskytovat. Kovariance mohou být způsobeny jen (shodnými) podmínkami měření, pokud tyto výsledky měření výrazněji ovlivňují.

Není-li zaručena nezávislost mezi chybami použitých měřidel, např. použitá měřidla jsou od jednoho výrobce a uživatel není přesvědčen o tom, že jsou vyrobeny tak, aby jejich chyby byly nezávislé, je nutné tuto závislost uvažovat při dalším výpočtu nejistot právě prostřednictvím kovariancí. Nelze-li určit, jaká část chyby použitých měřidel je závislá, uvažuje se korelační koeficient mezi nimi rovný jedné. Pocházejí-li použitá měřidla od téhož výrobce a mají i stejnou třídu přesnosti, postupuje se tak, jako by bylo měřeno jediným měřidlem.

##### 4.4 Měření kalibrovanou sadou měřidel

Při měření pomocí sady měřidel (sada měrek, závaží apod.), z nichž každé je schopno reprodukovat jednu hodnotu měřené veličiny, jsou známy odhady jejich hodnot  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) i nejistoty  $u(x_i)$ . Jednotlivé odhady mohou být mezi sebou nezávislé nebo také navzájem závislé podle použitého způsobu kalibrace měřidel. Je tedy (z kalibrace) třeba znát nejistoty  $u(x_i) = c_1, u(x_2) = c_2, \dots, u(x_p) = c_p$  ( $c_1, c_2, \dots, c_p$  jsou známá čísla) a kovariance  $u(x_i, x_j) = c_{ij}$  ( $c_{ij}$  jsou rovněž známá čísla pro  $i = 1, 2, \dots, p-1, j > i$ ), kdy ale často  $c_{ij} = 0$ .

Uvažujme např. vážení tělesa o hmotnosti 900 g pomocí sady kalibrovaných závaží. Hmotnost tělesa se porovnává s celkovou hmotností sady závaží ve složení např.  $m_{500} + m_{200} + m_{200^*}$ . Toto porovnání se opakuje  $n$ -krát. Potom lze psát model měření ve tvaru

$$m = m_{500} + m_{200} + m_{200^*} + x + K \quad (14)$$

Zde  $x$  je odhad rozdílu mezi hmotností tělesa a hmotností součtu použitých závaží a  $K$  je korekce vlivů podmínek měření.

Jestliže se nepředpokládá závislost mezi odhady hmotnosti závaží a korekcí  $K$ , mezi odhady hmotnosti závaží a odhadem  $x$  a mezi odhadem  $x$  a korekcí  $K$ , určí se nejistota odhadu hmotnosti tělesa podle vztahu (5) takto:

$$u^2(m) = u^2(m_{500}) + u^2(m_{200}) + u^2(m_{200^*}) + u^2(x) + u^2(K) + 2 u(m_{500}, m_{200}) + 2 u(m_{500}, m_{200^*}) + 2 u(m_{200}, m_{200^*}) \quad (15)$$

Hodnoty odhadů  $m_{500}, m_{200}, m_{200^*}$  jsou známy z kalibračního certifikátu a odhad  $x$  se určí jako aritmetický průměr naměřených rozdílů. Nejistoty  $u(m_{500}), u(m_{200})$  a  $u(m_{200^*})$  jsou také známy z kalibračního certifikátu, ve kterém by měly být uvedeny i kovariance  $u(m_{500}, m_{200}), u(m_{500}, m_{200^*}), u(m_{200}, m_{200^*})$ , což ale v současnosti zpravidla není splněno. Nejistota  $u(x)$  se určí z naměřených hodnot jako

výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru. Nejistota  $u(K)$  se určí metodou typu B na základě rozboru podmínek měření.

## 4.5 Měření pomocí měřicího přístroje s konstantní nejistotou

Při měření měřicím přístrojem s nejistotou konstantní v celém měřicím rozsahu přístroje platí, že jsou-li známy naměřené hodnoty (odhady hodnot měřených veličin)  $x$  a nejistoty  $u(x) = c$  pro všechny hodnoty  $x$  z měřicího rozsahu přístroje (kdy  $c$  je známé číslo), musí být známy také kovariance  $u(x_i, x_j) \in [0, c^2]$  pro všechny dvojice  $x_i, x_j$  z měřicího rozsahu přístroje. V praxi se však zpravidla použijí pouze krajní hodnoty intervalu kovariancí, tj. 0 a  $c^2$ , kde  $c^2$  se získá např. aplikací vztahu (9) nebo (10). Přitom se uvažuje nulová kovariance mezi dvěma hodnotami  $x_i$  a  $x_j$ , když se tato odečítá od výsledné nejistoty, a kovariance rovná  $c^2$ , když je tato připočítávána k výsledné nejistotě. Čímž se vlastně postihnou nejméně příznivé případy.

Například ověřený deformační tlakoměr třídy přesnosti 1 s měřicím rozsahem 0,1 MPa se standardní nejistotou  $u(P) = 0,58$  kPa má kovarianci mezi dvěma naměřenými hodnotami způsobenou měřicím přístrojem. Hodnota této kovariance se může pohybovat od 0 kPa do 0,34 kPa. Když se pomocí tohoto přístroje nepřímou určuje např. rozdíl tlaků, bude model měření

$$\Delta p = p_1 - p_2 \quad (16)$$

a pro nejistotu  $u(\Delta p)$  odhadu rozdílu tlaků  $\Delta p$  platí

$$u^2(\Delta p) = u^2(p_1) + u^2(p_2) - 2u(p_1, p_2) \quad (17)$$

Protože se kovariance vlivem chyby měřicího přístroje (stanovené metodou typu B) mohou pohybovat od 0 kPa do 0,34 kPa, je třeba v daném případě zvolit nulovou hodnotu, aby nejistota nebyla v žádném případě neoprávněně zmenšena. Ve všech vztazích uvedených v této podkapitole (4.5) se přitom předpokládá, že výslednou nejistotu ovlivní pouze kovariance vyhodnocované metodou B, protože měření není opakováno tolikrát, aby bylo možné uvažovat i kovariance určené metodou A, tj. statistickým vyhodnocením. Pokud by byl výsledek stanoven na základě opakovaných měření a bylo by zřejmé, že do výsledné nejistoty se promítnou i kovariance  $u_A(p)$ , pak by se tyto do výsledku zahrnuly obvyklým způsobem jako další člen „součtu“.

Stejný postup je možné uplatnit také při vyhodnocení poměru dvou tlaků měřených uvažovaným tlakoměrem. Model měření v tomto případě je

$$k = \frac{p_1}{p_2} \quad (18)$$

a nejistota podílu  $k$

$$u^2(k) = \frac{1}{p_2^2} u^2(p_1) + \frac{p_1^2}{p_2^4} u^2(p_2) - 2 \frac{1}{p_2} \frac{p_1}{p_2} u(p_1, p_2) \quad (19)$$

Kovariance způsobená chybou měřicího přístroje (stanovovaná metodou typu B) je opět pokládána za nulovou.

Naproti tomu při vyhodnocení součtu anebo součinu dvou tlaků naměřených uvažovaným tlakoměrem je třeba použít maximální možnou hodnotu kovariance. Pro model měření

$$p = p_1 + p_2 \quad (20)$$

bude nejistota výsledku

$$u^2(p) = u^2(p_1) + u^2(p_2) + 2u(p_1, p_2) \quad (21)$$

tj. bere se v úvahu největší možná hodnota, abychom opět v žádném případě nedošlo k neoprávněnému zmenšení nejistoty.

Obdobně se postupuje při součinu dvou tlaků. Pro model

$$p = p_1 \cdot p_2 \quad (22)$$

bude nejistota výsledku

$$u^2(p) = p_2^2 u^2(p_1) + p_1^2 u^2(p_2) + 2p_1 p_2 u(p_1, p_2) \quad (23)$$

Jiná situace by nastala, kdyby jednotlivé tlaky byly měřeny různými tlakoměry, u nichž je jisté, že jsou navzájem nezávislémi měřidly (např. využívají jiné principy, jsou od jiných výrobců atd.). Potom chyby měřicích přístrojů jsou navzájem nezávislé a jimi způsobená kovariance vyhodnocovaná metodou typu B je nulová. Jestliže není jisté, že oba použité tlakoměry a jejich chyby jsou nezávislé, je nutné i zde uvažovat s možnou kovariancí (např. oba využívají stejný princip a jsou od téhož výrobce, takže lze předpokládat, že chyby všech tlakoměrů dané třídy jsou závislé v důsledku totožné technologie výroby, stejných výrobních strojů apod.)

## 5. Závěr

Výpočet nejistot u úloh nepřímých měření je relativně složitou záležitostí, která je velmi citlivá zejména na správné ocenění vzájemných korelací mezi vstupními veličinami. V analýze nejistot se toto projeví v podobě členů vyjadřujících kovariance mezi jednotlivými složkami nejistot. Správné posouzení situace a zahrnutí či zanedbání kovariancí vyžadují již jistou měřičskou zkušenost. Třetí část cyklu o nejistotách naznačila, na vcelku jednoduchých příkladech, principy a složitost této analýzy.

## 6. Dodatek –

### – příklady určení nejistoty měření

#### Příklad 1. Nepřímé měření proudu pomocí měření úbytku napětí (bez kovariancí)

Úkolem je určit proud protékající obvodem měřením úbytku napětí na rezistoru s nominálním odporem 1  $\Omega$  digitálním voltmetrem. Dále je známo:

- teplota okolí při měření je v rozmezí  $(22 \pm 2)^\circ\text{C}$ ,
- obvodem protéká proud asi 50 mA,
- měřicí rezistor má při teplotě  $22^\circ\text{C}$  a proudu 50 mA odpor 0,999 8  $\Omega$  a příslušná rozšířená nejistota pro koeficient rozšíření  $k_r = 2$  je 0,000 2  $\Omega$  (údaje z certifikátu rezistoru),
- voltmetr s vnitřním odporem  $10^9 \Omega$  má při měřicím rozsahu 100 mV a v rozpětí teplot 15 až  $35^\circ\text{C}$  maximální dovolenou chybu 0,01 % naměřené hodnoty plus 0,005 % měřicího rozsahu (údaje výrobce potvrzené v certifikátu voltmetru).

Pro určení proudu se jako matematický model úlohy použije známý vztah Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{R}$$

kde

$I$  (mA) je nepřímě měřený (hledaný) proud,  $U$  (mV) přímo měřený úbytek napětí,  $R$  ( $\Omega$ ) odpor měřicího rezistoru.

Za stejných podmínek bylo naměřeno deset hodnot úbytku napětí  $U_p$  (tab. I).

Odhad hodnoty měřené veličiny – úbytku napětí – je reprezentován aritmetickým průměrem z deseti provedených měření

$$\bar{U} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} U_i = 50,44 \text{ mV}$$

Odhad hodnoty nepřímě měřeného proudu je (podle modelu)

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R} = \frac{50,44}{0,9998} = 50,45 \text{ mA}$$

Hlavním cílem je ale určit standardní nejistotu, jejímiž složkami jsou:

1. Standardní nejistota měření úbytku napětí stanovená metodou A, tj.

$$u_A(U) = s(\bar{U}) = \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} \sum_{i=1}^{10} (U_i - \bar{U})^2} = 1,011 \cdot 10^{-2} \text{ mV}$$

2. Standardní nejistota měření úbytku napětí stanovená metodou B se stanoví z maximální dovolené chyby použitého voltmetru, která je přibližně 0,01 mV (při měřeném napětí 50,45 mV je chyba měřidla 0,01 % z 50,45 mV plus 0,005 % z rozsahu 100 mV). Za předpokladu rovnoměr-

**Tab. 1. Naměřené hodnoty úbytku napětí (k příkladu 1)**

Č. měření $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_i$ (mV)	50,46	50,44	50,45	50,48	50,41	50,49	50,40	50,40	50,45	50,42

**Tab. 2. Bilanční tabulka nejistot při nepřímém měření proudu (k příkladu 1)**

Veličina $X_i$	Odhad $x_i$	Standardní nejistota $u(x_i)$	Koeficient citlivosti $A_i$	Příspěvek ke standardní nejistotě $u_i(I)$ ; nejistota $u(I)$ (mA)
Napětí $\bar{U}$	50,44 mV	$1,011 \cdot 10^{-2}$ mV	1 mA/mV	$1,011 \cdot 10^{-2}$ mA
Chyba voltmetru $\Delta U$	0,00 mV	$0,58 \cdot 10^{-2}$ mV	1 mA/mV	$0,58 \cdot 10^{-2}$ mA
Odpor rezistoru $R$	0,999 8 $\Omega$	0,000 1 $\Omega$	50,46 mA/ $\Omega$	$0,55 \cdot 10^{-2}$ mA
Proud $I$	50,45 mA			$1,27 \cdot 10^{-2}$ mA

ného rozdělení je standardní nejistota typu B (viz [2])

$$u_B(U) = 0,01 / \sqrt{3} = 0,0058 \text{ mV}$$

Proud procházející voltmetrem je zanedbán. Vliv kolísání teploty je zahrnut v základní dovolené chybě voltmetru.

3. Standardní nejistota měřicího rezistoru odpovídající jeho zadané rozšířené nejistotě a zadanému  $k_r$  je  $u(R) = 0,000 2/2 = 0,000 1 \text{ W}$ . Vliv teploty na změnu elektrického odporu je vzhledem k vlivu ostatních uvažovaných zdrojů nejistot zanedbatelný.

Standardní nejistota měření proudu se určí sloučením shora stanovených složek uplatněním zákona šíření nejistot na použitý model měření. V tomto případě se neuvážují žádné kovariance, protože je přímo měřena jen jediná veličina (úbytek napětí) a odhady dovolené chyby voltmetru a hodnoty odporu měřicího rezistoru nejsou korelované. Výsledná standardní nejistota proudu protékajícího měřicím rezistorem je tudíž

$$u_I = \sqrt{A_U^2 u_A^2(U) + A_U^2 u_B^2(U) + A_R^2 u^2(R)} = \sqrt{1^2 \cdot (1,011 \cdot 10^{-2})^2 + 1^2 \cdot (0,58 \cdot 10^{-2})^2 + 50,46^2 \cdot (0,01 \cdot 10^{-2})^2} = 1,27 \cdot 10^{-2} \text{ mA}$$

příčemž

$$A_U = \frac{\partial I}{\partial U} = \frac{1}{R} = 1 \text{ mA/mV}$$

$$A_R = \frac{\partial I}{\partial R} = \frac{U}{R^2} = \frac{50,44}{0,9998^2} = 50,46 \text{ mA}/\Omega$$

Použitý postup stanovení nejistoty přehledně ukazuje tab. 2.

### Příklad 2a. Nepřímé měření délky tyče (obecné řešení)

Úkolem je změřit délku tyče delší než 1 m čárkovým měřidlem nominální délky 1 m. Dále je známo:

- měřidlo má podle certifikátu dovolenou chybu  $\delta_{\text{dov}} = \delta_1 + \delta_2 l$  při teplotě 20 °C,

- materiál měřidla a materiál měřené tyče mají stejný teplotní součinitel délkové roztažnosti,
- měřidlo i tyče mají při měření stejnou teplotu,
- metoda měření spočívá ve dvou přímých porovnávacích částí měřené tyče a měřidla,
- měření lze opakovat  $n$ -krát za stejných podmínek.

Matematický model měření je  $l = l_1 + l_2$ , kde  $l_1$  a  $l_2$  jsou přímým měřením stanovené délky částí tyče a  $l$  je výsledek měření (nepřímě stanovená délka celé tyče).

Pro obě přímá měření se používá stejné měřidlo, a jsou proto korelovaná. Standardní nejistota výsledku  $u_c(l)$  se určí ze vztahu

$$u_c(l) = \sqrt{u^2(l_1) + u^2(l_2) + 2u(l_1, l_2)}$$

kde pro jednotlivé naměřené hodnoty jsou  $l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1n}$  a  $l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2n}$  platí

$$u(l_1) = \sqrt{u_A^2(l_1) + u_B^2(l_1)}, \quad u(l_2) = \sqrt{u_A^2(l_2) + u_B^2(l_2)}$$

$$u_A(l_i) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}, \quad \bar{l}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i$$

a obdobně pro  $u_A(l_2)$ , když se  $l_1, l_{1i}$  a  $\bar{l}_1$  nahradí  $l_2, l_{2i}$  a  $l_2$ , a dále

$$u_B(l_1) = \frac{\delta_{1\text{dov}}}{\sqrt{3}}, \quad \delta_{1\text{dov}} = \delta_1 + \delta_2 l_1$$

$$u_B(l_2) = \frac{\delta_{2\text{dov}}}{\sqrt{3}}, \quad \delta_{2\text{dov}} = \delta_1 + \delta_2 l_2$$

Protože obě měření se vykonávají stejným měřidlem, je mezi nimi kovariance  $u_B(l_1, l_2)$ , která se stanoví metodou B podle vztahu (11) v základním textu pro  $A_1 = A_2 = 1$ , tedy

$$u_B(l_1, l_2) = u_B^2(l)$$

Kovariance  $u_A(l_1, l_2)$  vyhodnocovaná metodou A se určí ze vztahu (8). Celková kovariance je

$$u(l_1, l_2) = u_A(l_1, l_2) + u_B(l_1, l_2)$$

a standardní nejistota výsledku měření se určí ze vztahu

$$u(l) = \sqrt{u_A^2(l_1) + u_A^2(l_2) + 2u_A(l_1, l_2) + u_B^2(l_1) + u_B^2(l_2) + 2u_B(l_1, l_2)}$$

Stejný výsledek lze v daném případě získat, když se vypočítá celková délka pro každé opakované měření jako  $l_i = l_{1i} + l_{2i}$ , přičemž standardní nejistota stanovená metodou A je

$$u_A(l) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}, \quad \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i$$

a standardní nejistota stanovená metodou B je

$$u_B(l) = \frac{\delta_{\text{dov}}(l)}{\sqrt{3}}$$

kde  $\delta_{\text{dov}}(l) = \delta_{1\text{dov}} + \delta_{2\text{dov}} = 2\delta_1 + \delta_2(l_1 + l_2)$ .

Jiná situace nastane, použijí-li se k měření dvě různá měřidla od dvou výrobců, o kterých lze spolehlivě předpokládat, že mezi nimi není žádná závislost, a když se jeden úsek tyče změří prvním a druhý druhým měřidlem, přičemž každé měření se opakuje  $n$ -krát za podmínek uvedených v zadání této úlohy. Výsledek se potom určí ze vztahů uvedených pro případ závislých přímých měření s tím rozdílem, že kovariance vyhodnocované metodou B budou nulové (chyby měření obou porovnávaných jsou ve všeobecnosti zcela jiné a nezávislé, protože byla použita nezávislá měřidla). Kovariance vyhodnocované metodou A (jestliže by měly opodstatnění) se určí z naměřených hodnot, stejně jako v případě závislých měření.

Není-li při použití dvou měřidel zaručeno, že jejich chyby jsou opravdu nezávislé, je lépe postupovat tak, jako by se měřilo měřidlem jediným.

### Příklad 2b. Nepřímé měření délky tyče (číselné řešení)

Úloha zní změřit skutečnou délku  $l$  tyče o jmenovité délce 1 400 mm pomocí přesného čárkového měřítka délky 1 m s dělením po 1 mm, které je tedy třeba přikládat k součásti nadvakrát. Dále je známo:

- dovolená chyba měřidla je  $\delta_{\text{dov}} = \delta_1 + \delta_2 l$  (podle certifikátu),
- základní chyba měřidla, představovaná nejmenším dílkem stupnice, je  $\delta_1 = 1 \text{ mm}$  (rozlišovací schopnost),
- výrobce definuje pro výpočet složky chyby závislé na měřené délce koeficient  $\delta_2 = 2 \text{ mm/m}$ ,
- jiné vlivy, jako je působení teploty apod., se zanedbávají,
- z důvodů existence určité tvarové značky je výhodné rozdělit celou délku tyče na dva úseky o jmenovitých hodnotách 900 mm a 500 mm.

Matematickým modelem měření je součet dílčích délek  $l = l_1 + l_2$ . Naměřené hodnoty jsou spolu s aritmetickým průměrem a jeho směro-

datnou odchylkou uvedeny v tab. 3. Výsledku se lze přitom dopracovat dvěma způsoby.

**Tab. 3. Naměřené a vypočtené hodnoty při nepřímém měření délky tyče (k příkladu 2b)**

Číslo měření	$l_1$ (mm)	$l_2$ (mm)	$l = l_1 + l_2$ (mm)
1	902	501	1 403
2	904	500	1 404
3	903	499	1 402
4	902	501	1 403
5	901	501	1 402
6	902	501	1 403
7	900	502	1 402
8	899	498	1 397
9	902	499	1 401
10	901	502	1 403
$\bar{l}$	901,60	500,40	1 402,00
$u_A(l_i) = s_i$	0,452	0,427	0,615
$u_A(l_1, l_2)$	-0,004 4 mm <sup>2</sup>		

Jeden spočívá v tom, že se nejprve samostatně spočítají nejistoty každé z měřených délek. Po dosažení známých hodnot do příslušných vztahů uvedených v obecném řešení úlohy (příklad 2a) dostaneme

$$u_B(l_1) = s_{i1} = 0,452 \text{ mm}, \quad u_A(l_1) = s_{i1} = 0,427 \text{ mm}$$

$$u_A(l_1) = \frac{2,8}{\sqrt{3}} = 1,618 \text{ mm}, \quad u_A(l_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,156 \text{ mm}$$

kde

$$u_C(l_1) = 1,680 \text{ mm}, \quad u_C(l_2) = 1,232 \text{ mm}$$

a výsledná nejistota včetně započtení kovariance bude

$$u_C^2(l) = u_C^2(l_1) + u_C^2(l_2) + 2u_A(l_1, l_2) + 2u_B(l_1)u_B(l_2) = 2,822 4 + 1,517 8 - 2 \cdot 0,004 4 + 2 \cdot 1,618 \times 1,156 = 8,072 \text{ mm}^2$$

$$u_C(l) = \sqrt{8,072} = 2,84 \text{ mm}$$

kde pro kovarianci určenou metodou A, protože existují reálné dvojice měření, se použije vztah (8), tj. po dosazení

$$u_A(l_1, l_2) = \frac{1}{10 \cdot 9} (0,24 - 0,96 - 1,96 + 0,24 - 0,36 + 0,24 - 2,56 + 6,24 - 0,56 - 0,96) = -0,0044 \text{ mm}^2$$

a pro kovarianci určenou metodou B se použije korelační činitel rovný 1, protože měření obou částí délky tyče jediným měřítkem je velmi silnou korelací.

Druhý postup spočívá v tom, že se nejprve stanoví standardní nejistoty určené metodou A i B včetně kovariancí samostatně a poté se sloučí, tj.

$$u_A(l) = \sqrt{u_A^2(l_1) + u_A^2(l_2) + 2u_A(l_1, l_2)} = 0,615 \text{ mm}$$

$$u_B(l) = \sqrt{u_B^2(l_1) + u_B^2(l_2) + 2u_B(l_1)u_B(l_2)} = 2,774 \text{ mm}$$

$$u_C(l) = \sqrt{u_A^2(l) + u_B^2(l)} = 2,84 \text{ mm}$$

Podobně jako v tomto příkladu je kovariance stanovená metodou A v praxi často natolik malá, že je možné ji zanedbat a nepočítat s ní. Kromě toho ne vždy vznikají při měření dvojice potřebné k jejímu určení. Jiné je to s kovariancí stanovenou metodou B, která představuje velmi významný příspěvek celkové nejistotě. Uvedeným příkladem je možné demonstrovat také skutečnost, že není rozhodující, který postup se k určení nejistoty použije. Není-li k opomenut některý z podstatných vlivů, musí se všemi postupy dojít k témuž výsledku.

Čtenář sám si nyní může porovnat nárůst složitosti nalezení výsledku nepřímého měření s kovariancemi oproti přímému měření délky tyče dlouhé 1 400 mm měřítkem délky 2 000 mm, uvedenému ve [2] jako příklad 2.

### Příklad 3. Objem válečku (číselné řešení)

Úkolem je určit objem  $V$  kovového válečku z deseti opakovaných měření jeho průměru  $d$  a výšky  $h$  tímtež posuvným měřítkem. Dále je dáno:

- jmenovité rozměry válečku  $d_n = 80 \text{ mm}$ ,  $h_n = 50 \text{ mm}$ ,
- základní chyba rozlišení použitého měřidla je 0,05 mm a předpokládaná integrovaná osobní chyba 0,1 mm,
- přímé měření průměru téhož válečku je popsáno ve [2] jako příklad 1.

S ohledem na návaznost na příklad 1 ze [2] je použito vyhodnocování každé z přímo měřených veličin samostatně, přičemž u průměru válečku se použijí výsledky již získané ve [2], jak je rekapitulují tab. 4 a tab. 5.

Zcela analogicky se pokračuje opakovaným měřením výšky válečku (tab. 6).

Dále se vypočte aritmetický průměr z naměřených hodnot výšky válečku a jeho standardní nejistota pomocí metody A

$$\bar{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} h_i = 50,07 \text{ mm}$$

$$u_A(h) = s_{\bar{h}} = 0,037 \text{ mm}$$

Nejistota stanovená pomocí metody B je stejná jako u měření průměru, tzn.  $u_B(h) = 0,065 \text{ mm}$ . Výsledná kombinovaná standardní nejistota výšky válečku je tudíž

$$u_C(h) = \sqrt{u_A^2(h) + u_B^2(h)} = 0,075 \text{ mm}$$

a vše opět shrnuje tab. 7.

Při známých výchozích parametrech lze snadno vypočítat hledaný objem válečku  $V$  podle vztahu pro objem válce, kam se dosadí

$$\bar{d} = 80,060 \text{ mm}, \quad \bar{h} = 50,070 \text{ mm}$$

$$V = \frac{\pi \bar{d}^2}{4} \bar{h} = 252 056,93 \text{ mm}^3$$

**Tab. 4. Naměřené hodnoty průměru válečku (podle [2] k příkladu 3)**

Č. měření $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ (mm)	80,1	80,2	80,1	79,9	80,0	80,2	80,1	79,9	80,0	80,1

**Tab. 5. Bilanční tabulka nejistot při měření průměru válečku pomocí posuvného měřítka (podle [2] k příkladu 3)**

Veličina $X_i; d$	Odhad $x_i; d$ (mm)	Standardní nejistota $u(x_i)$ (mm)	Typ rozdělení	Koeficient citlivosti $A_i$	Příspěvek ke standardní nejistotě $u_i(d)$ ; nejistota $u(d)$ (mm)
$\bar{d}$	80,060	0,034	normální	1	0,034
Měřidlo $\delta_1(d)$	0,000	0,029	rovnoměrné	1	0,029
Obsluha $\delta_2(d)$	0,000	0,058	rovnoměrné	1	0,058
$d$	80,060				0,073

**Tab. 6. Naměřené hodnoty výšky válečku (k příkladu 3)**

Č. měření $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_i$ (mm)	50,2	49,9	50,1	50,2	50,0	49,9	50,1	50,2	50,0	50,1

**Tab. 7. Bilanční tabulka nejistot při měření výšky válečku pomocí posuvného měřítka (k příkladu 3)**

Veličina $X_i; h$	Odhad $x_i; h$ (mm)	Standardní nejistota $u(x_i)$ (mm)	Typ rozdělení	Koeficient citlivosti $A_i$	Příspěvek ke standardní nejistotě $u_i(h)$ ; nejistota $u(h)$ (mm)
$\bar{h}$	50,070	0,037	normální	1	0,037
Měřidlo $\delta_1(h)$	0,000	0,029	rovnoměrné	1	0,029
Obsluha $\delta_2(h)$	0,000	0,058	rovnoměrné	1	0,058
$h$	50,070				0,075

Protože průměr i výška válečku byly měřeny jediným posuvným měřítkem, je nutné uvážit nejen projev jejich kombinovaných standardních nejistot do výsledku prostřednictvím koeficientů citlivosti, vypočítaných jako parciální derivace podle vztahu (4), ale také projev silně korelovaných vlivů s koeficientem korelace rovným 1. Výslednou standardní nejistotu lze pak určit s ohledem na nulovou kovarianci stanovenou metodou A ze vztahu

$$u^2(V) = A_d^2 u_c^2(d) + A_h^2 u_c^2(h) + 2A_d A_h u_B(d) u_B(h)$$

Po dosazení hodnot součinitelů citlivosti

$$A_d = \frac{\pi d}{2} h = 6296,7; \quad A_h = \frac{\pi d^2}{4} = 5034,1$$

a nejistot  $u_c(d) = 0,073$  mm,  $u_c(h) = 0,075$  mm a  $u_B(d) = u_B(h) = 0,065$  mm vyjde vý-

sledná standardní kombinovaná nejistota objemu válečku

$$u^2(V) = 621\,658,31 \text{ mm}^6, \text{ tj. } u(V) = 788,47 \text{ mm}^3$$

Výsledek měření objemu lze v souladu s tradičními zvyklostmi zapsat také ve tvaru  $V = (252,1 \pm 1,6) \text{ cm}^3$ , kde  $1,6 \text{ cm}^3$  je rozšířená nejistota, vypočítaná jako dvojnásobek standardní nejistoty a zaokrouhlená nahoru.

*Poznámka autorů:* Téměř shodných výsledků se dosáhne např. i druhým z postupů použitých v příkladu 2b: z naměřených hodnot se vypočítá deset objemů a tyto hodnoty se statisticky zpracují včetně analýzy nejistot, přičemž se opět nesmějí opomenout příslušné korelační vlivy.

#### Literatura:

[1] PALEŇČÁR, R. – VDOLEČEK, F. – HALAJ, M.: Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot.

Automa, 7, 2001, č. 7-8, s. 50-54 (a literatura tam uvedená).

[2] PALEŇČÁR, R. – VDOLEČEK, F. – HALAJ, M.: Nejistoty v měření II: nejistoty přímých měření. Automa, 7, 2001, č. 10, s. 52-56.

*Ing. František Vdoleček, CSc.,  
FSI VUT, Brno  
vdolecek@uai.fme.vutbr.cz  
doc. Ing. Rudolf Palenčár, CSc.,  
SjF STU, Bratislava  
palencar@kam.vm.stuba.sk  
Ing. Martin Halaj, PhD.,  
SjF STU, Bratislava  
halaj@kam.vm.stuba.sk*

□